梶島岳夫著「乱流の数値シミュレーション」(養賢堂, 1999)

補遺 2

一般座標における非圧縮乱流の基礎式

本文では，**第 1 部**で一般座標における流れの数値解法を詳述したが，**第 2 部**における乱流モデルの記述はデカルト座標までに止めた．また，**付録 A** でも，乱流モデルの一般座標成分表示を割愛した．その理由は，強保存型の運動方程式 (4.25) では速度のデカルト座標成分が基本変数であり，応力の各成分もデカルト座標のものが使われるからである．しかし，一般座標の反変成分のみで乱流モデルを記述する場合がある．

ここでは，一般曲線座標において，レイノルズ平均した非圧縮の乱流計算に渦粘性モデルを導入するために最低限必要な諸式を補っておきたい．簡単のため，流体の密度 ρ と動粘性係数 ν は一定とし，座標系は時間的に変化しないものとする．

なお「乱流の数値シミュレーション」から引用された式の番号には下線が付けられている．

1　レイノルズ平均を施した流れの基礎式

一般座標における基底を $\hat{\boldsymbol{g}}_i$ とする．速度ベクトルは反変成分 U^i により $\boldsymbol{u} = U^i \hat{\boldsymbol{g}}_i$ で表される．

変数を $U^i = \overline{U}^i + U'^i$, $P(= p/\rho) = \overline{P} + P'$ のようにレイノルズ平均 ($\overline{U}^i$, $\overline{P}$) とそれからの変動成分 (U'^i, P') に分ける．

連続の式 (A.59)

$$\frac{1}{J}\frac{\partial (JU^k)}{\partial \xi^k} = 0 \tag{1}$$

にレイノルズ平均を施すと

$$\frac{1}{J}\frac{\partial (J\overline{U}^k)}{\partial \xi^k} = 0 \tag{2}$$

となる．

運動方程式 (A.74)

$$\frac{\partial U^i}{\partial t} + H^{ik}|_k = 0 \tag{3}$$

$$H^{ik} = U^i U^k + \hat{g}^{ik} P - \nu(\hat{g}^{kl} U^i|_l + \hat{g}^{il} U^k|_l) \tag{4}$$

の U^i, P にそれぞれ $\overline{U}^i + U'^i$, $\overline{P} + P'$ を代入する．H^{ik} は

$$\begin{aligned} H^{ik} \;\; = \;\; & (\overline{U}^i \overline{U}^k + \overline{U}^i U'^k + U'^i \overline{U}^k + U'^i U'^k) + \hat{g}^{ik}(\overline{P} + P') \\ & -\nu\Big\{\hat{g}^{kl}(\overline{U}^i|_l + U'^i|_l) + \hat{g}^{il}(\overline{U}^k|_l + U'^k|_l)\Big\} \end{aligned} \tag{5}$$

となる．

レイノルズ平均運動方程式は，式 (3),(4) の平均をとって次のように表される．

$$\frac{\partial \overline{U}^i}{\partial t} + \overline{H}^{ik}|_k = 0 \tag{6}$$

$$\overline{H}^{ik} = \overline{U}^i \overline{U}^k + \overline{U'^i U'^k} + \hat{g}^{ik} \overline{P} - \nu(\hat{g}^{kl} \overline{U}^i|_l + \hat{g}^{il} \overline{U}^k|_l) \tag{7}$$

2 応力方程式

式 (1) と式 (2) との差から，速度変動についても連続の式

$$\frac{1}{J} \frac{\partial (J U'^k)}{\partial \xi^k} = 0 \tag{8}$$

が成立することがわかる．式 (3),(5) と式 (6),(7) との差から，変動成分の運動方程式は

$$\frac{\partial U'^i}{\partial t} + H'^{ik}|_k = 0 \tag{9}$$

$$H'^{ik} = \;\; (\overline{U}^i U'^k + U'^i \overline{U}^k + U'^i U'^k - \overline{U'^i U'^k}) + \hat{g}^{ik} P' - \nu(\hat{g}^{kl} U'^i|_l + \hat{g}^{il} U'^k|_l)$$

である．式 (8) を考慮すれば，H'^{ik} の粘性項の一方を消すことができ

$$H'^{ik} = (\overline{U}^i U'^k + U'^i \overline{U}^k + U'^i U'^k - \overline{U'^i U'^k}) + \hat{g}^{ik} P' - \nu \hat{g}^{kl} U'^i|_l \tag{10}$$

でもよい．

変動成分の運動方程式から $U'^j(\partial U'^i/\partial t + H'^{ik}|_k) = 0$ と $U'^i(\partial U'^j/\partial t + H'^{jk}|_k) = 0$ の和

$$\frac{\partial(U'^i U'^j)}{\partial t} + U'^j H'^{ik}|_k + U'^i H'^{jk}|_k = 0 \tag{11}$$

を展開すれば[1]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(U'^i U'^j)}{\partial t} + \overline{U}^k (U'^i U'^j)|_k + (U'^j U'^k)\overline{U}^i|_k + (U'^i U'^k)\overline{U}^j|_k + (U'^i U'^j U'^k)|_k \\
&\quad - U'^j\, \overline{U'^k U'^i}|_k - U'^i\, \overline{U'^k U'^j}|_k + U'^j(\hat{g}^{ik}\partial P')|_k + U'^i(\hat{g}^{jk}\partial P')|_k \\
&\quad - \nu(\hat{g}^{kl} U'^j)U'^i|_{kl} - \nu(\hat{g}^{kl} U'^i)U'^j|_{kl} = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

となる．

式 (12) の平均をとり，圧力項と粘性項を変形すると，

$$\frac{\partial \overline{U'^i U'^j}}{\partial t} = C^{ij} + P^{ij} + T^{ij} + (J_T^{ijk} + J_P^{ijk} + J_V^{ijk})|_k + D^{ij} \tag{13}$$

となる．右辺の各項はそれぞれ

対流 (convection)

$$C^{ij} = -\overline{U}^k \cdot \overline{U'^i U'^j}|_k \tag{14}$$

生成 (production)

$$P^{ij} = -\overline{U'^i U'^k} \cdot \overline{U}^j|_k - \overline{U'^j U'^k} \cdot \overline{U}^i|_k \tag{15}$$

[1]用いた関係式をメモしておく．まず，式 (8) より

$$U'^k|_k = 0$$

である [本文の式 (A.48), 式 (A.49) 参照]．圧力勾配については，発散型では $\nabla \cdot (P\boldsymbol{I})$ と表示されるが，

$$\nabla \cdot (P\boldsymbol{I}) = \nabla P \cdot \boldsymbol{I} + P \nabla \cdot \boldsymbol{I} = \nabla P$$

の関係より，勾配型 ∇P と等価である．単位テンソルの微分は当然 $\nabla \cdot \boldsymbol{I} = 0$ であるが，$\boldsymbol{I} = \hat{\boldsymbol{g}}^j \hat{\boldsymbol{g}}_j = \hat{g}^{ij} \hat{\boldsymbol{g}}_i \hat{\boldsymbol{g}}_j$ の関係から，

$$\hat{g}^{ij}|_j \ (= \hat{g}^{ji}|_j) = 0$$

である．つまり，U'^k や $\hat{g}^{ij}$ については，添え字方向の共変微分は 0 であり，微分から出し入れしても差し支えない．

圧力歪相関 (pressure-strain) または再分配 (redistribution)

$$T^{ij} = \overline{P'(\hat{g}^{ik}U'^j|_k + \hat{g}^{jk}U'^i|_k)} \tag{16}$$

乱流拡散 (turbulence-diffusion) 流束

$$J_T^{ijk} = -\overline{U'^i U'^j U'^k} \tag{17}$$

圧力拡散 (pressure-diffusion) 流束

$$J_P^{ijk} = -\hat{g}^{ik}\overline{P'U'^j} - \hat{g}^{jk}\overline{P'U'^i} \tag{18}$$

粘性拡散 (viscous-diffusion) 流束

$$J_V^{ijk} = \nu\hat{g}^{kl}\,\overline{U'^i U'^j}|_l \tag{19}$$

散逸 (dissipation)

$$D^{ij} = -2\nu\hat{g}^{kl}\,\overline{U'^i|_k U'^j|_l} \tag{20}$$

これが速度の反変成分だけで表示した応力方程式であるが，物理成分ではないことに注意する必要がある．物理成分表示を得るためには，速度については $\sqrt{\hat{g}_{ii}}U^i = U^{(i)}$(総和をとらない), テンソル成分については $\sqrt{\hat{g}_{ii}}\sqrt{\hat{g}_{jj}}A^{ij} = A^{(ij)}$(総和をとらない) の関係を用いて書き換える必要がある．

3　乱れエネルギーの収支式

乱流変動のエネルギーは

$$k = \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}{2} = \frac{\hat{g}_{ij}}{2}\overline{U'^i U'^j} \tag{21}$$

で定義される．式 (13) に $\hat{g}_{ij}/2$ をかければ k の収支式を導くことができる．

$$\frac{\partial k}{\partial t} = C_K + P_K + (J_{TK}^k + J_{PK}^k + J_{VK}^k)|_k + D_K \tag{22}$$

となる．上式の各項は物理的な次元をもっている．

式 (22) 右辺の各項はそれぞれ

$$C_K = -\overline{U}^k\frac{\hat{g}_{ij}}{2}\overline{U'^i U'^j}|_k = -\overline{U}^k\frac{\partial k}{\partial \xi^k} \tag{23}$$

$$P_K = -\hat{g}_{ij}\overline{U'^i U'^k}\cdot\overline{U}^j|_k \tag{24}$$

$$J_{TK}^k = -\frac{\hat{g}_{ij}}{2}\overline{U'^i U'^j U'^k} = -\overline{kU'^k} \tag{25}$$
$$J_{PK}^k = -\overline{P'U'^k} \tag{26}$$
$$J_{VK}^k = \nu\frac{\hat{g}_{ij}\hat{g}^{kl}}{2}\overline{U'^i U'^j}\big|_l = \nu\hat{g}^{kl}\frac{\partial k}{\partial\xi^l} \tag{27}$$
$$D_K = -\nu\hat{g}_{ij}\hat{g}^{kl}\overline{U'^i|_k U'^j|_l} \tag{28}$$

となる[2]．圧力歪相関は連続の式から $T_K = \overline{P'U'^k|_k} = 0$ である．

4　乱流モデル

4.1　渦粘性モデル

渦粘性モデルは，平均流れの運動方程式における流束 $\overline{H}^{ik}$ にあらわれるレイノルズ応力 $\overline{U'^i U'^k}$ に対して，渦粘性係数 ν_T を用いて

$$\overline{U'^i U'^k} = \frac{2}{3}\hat{g}^{ik}k - 2\nu_T D^{ik} \tag{29}$$

と与えるものである[3]．ここで

$$D^{ik} = \frac{1}{2}(\hat{g}^{km}\overline{U}^i|_m + \hat{g}^{im}\overline{U}^k|_m) \tag{30}$$

はひずみ速度テンソルである．

渦粘性近似した運動量流束は

$$\overline{H}^{ik} = \overline{U}^i\overline{U}^k + \hat{g}^{ik}\Big(\overline{P} + \frac{2}{3}k\Big) - 2(\nu+\nu_T)D^{ik} \tag{31}$$

で表される．

[2] $v_i\big|_j = (\hat{g}_{ik}v^k)\big|_j$ と $v_i\big|_j = v^k\big|_j\hat{g}_{ik}$ を比較すればわかるように $\hat{g}_{ik}$ を共変微分 $\big|_j$ の中に入れてもよい．たとえば文献 5) の p.65 参照．

[3] $\overline{U'^i U'^k}$ に

$$-\nu_T\big(\hat{g}^{km}\overline{U}^i\big|_m + \hat{g}^{im}\overline{U}^k\big|_m\big)$$

のようなモデルを考える．両者に $\hat{g}_{ik}$ かけると，それぞれ

$$\hat{g}_{ik}\overline{U'^i U'^k} = 2k, \quad -\nu_T\big(\delta_i^m\overline{U}^i\big|_m + \delta_k^m\overline{U}^k\big|_m\big) = -2\nu_T\nabla\cdot\boldsymbol{U} = 0$$

となり一致しない．そこで $2k\hat{g}^{ik}/3$(これに $\hat{g}_{ik}$ をかけると $\hat{g}^{ik}\hat{g}_{ik} = \delta_k^k = 3$ より $2k$ となる) を加える必要がある．

4.2 標準 $k-\varepsilon$ モデル

$k-\varepsilon$ モデルは，乱れの運動エネルギー k と散逸率 $\varepsilon(=-D_K)$ の式を解き，式 (31) における渦粘性係数 ν_T を

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{32}$$

で与えるものである．

乱れエネルギーの輸送方程式 (22) は

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U}^k \frac{\partial k}{\partial \xi^k} = P_K - \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}}\frac{\partial}{\partial \xi^k}\left\{\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k}\right)\sqrt{\hat{g}}\hat{g}^{kl}\frac{\partial k}{\partial \xi^l}\right\} \tag{33}$$

散逸率の輸送方程式は

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U}^k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi^k} = (C_{\varepsilon 1}P_K - C_{\varepsilon 2})\frac{\varepsilon}{k} + \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}}\frac{\partial}{\partial \xi^k}\left\{\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\sqrt{\hat{g}}\hat{g}^{kl}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi^l}\right\} \tag{34}$$

と近似される[4]．乱れエネルギーの生成項は

$$P_K = 2\nu_T \hat{g}_{ij}\hat{g}_{kl}D^{ik}D^{jl} \tag{35}$$

である[5]．定数群は次のとおりである．

$$C_\mu = 0.09,\quad \sigma_k = 1.0,\quad \sigma_\varepsilon = 1.3,\quad C_{\varepsilon 1} = 1.44,\quad C_{\varepsilon 2} = 1.92$$

---

[4]拡散項には次の関係を用いた．

$$\left\{\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k}\right)\hat{g}^{kl}\frac{\partial k}{\partial \xi^l}\right\}\Big|_k = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}}\frac{\partial}{\partial \xi^k}\left\{\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k}\right)\sqrt{\hat{g}}\hat{g}^{kl}\frac{\partial k}{\partial \xi^l}\right\}$$

[5]生成項の導出は，式 (24)

$$\begin{aligned} P_K &= -\hat{g}_{ij}\overline{U'^i U'^k}\cdot\overline{U}^j\big|_k = -\hat{g}_{ij}\hat{g}_{kl}\overline{U'^i U'^k}\cdot\hat{g}^{ln}\overline{U}^j\big|_n \\ &= -\frac{\hat{g}_{ij}\hat{g}_{kl}}{2}\overline{U'^i U'^k}\left(\hat{g}^{ln}\overline{U}^j\big|_n + \hat{g}^{jn}\overline{U}^l\big|_n\right) = -\hat{g}_{ij}\hat{g}_{kl}\overline{U'^i U'^k}D^{jl} \end{aligned}$$

に式 (29) を代入して

$$P_K = -\hat{g}_{ij}\hat{g}_{kl}\left(\frac{2}{3}\hat{g}^{ik}k - 2\nu_T D^{ik}\right)D^{jl} = 2\nu_T\hat{g}_{ij}\hat{g}_{kl}D^{ik}D^{jl}$$

のように導かれる (連続の式より $\hat{g}_{ij}\hat{g}_{kl}\hat{g}^{ik}D^{jl} = \hat{g}_{jl}D^{jl} = 0$)．