「乱流の数値シミュレーション」(梶島岳夫著，養賢堂，1999)

補遺 1

円柱座標における非圧縮流れの基礎式

一般座標系における流れの基礎方程式 (**付録 A**) の例題として，(直交座標のため反変・共変の区別はないという意味では特殊な例ではあるが) しばしば使われる円柱座標への変換を行う．まず，座標系を変換し，次に物理成分表示に改めることにより，流れの基礎方程式を導く．ここでは非圧縮流れのみを扱うことにする．簡単のため，流体の密度 ρ と動粘性係数 ν は一定とし，座標系は時間的に変化しないものとする．

なお「乱流の数値シミュレーション」から引用された式の番号には下線が付けられている．

1　円柱座標の計量テンソルなど

座標系 ξ^i に円柱座標

$$\xi^1 = r, \quad \xi^2 = \theta, \quad \xi^3 = z \tag{1}$$

座標系 x^i に直角座標 (デカルト座標)

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{2}$$

を対応づけておく．

座標変換

$$x^1 = \xi^1 \cos \xi^2, \quad x^2 = \xi^1 \sin \xi^2, \quad x^3 = \xi^3 \tag{3}$$

の関係より，式 (A.10) のマトリックス $\bar{A}^i_j = \partial x^i / \partial \xi_j$ の各成分は

$$\begin{aligned}
&\bar{A}^1_1 = \cos \xi^2 \quad && \bar{A}^1_2 = -\xi^1 \sin \xi^2 \quad && \bar{A}^1_3 = 0 \\
&\bar{A}^2_1 = \sin \xi^2 && \bar{A}^2_2 = \xi^1 \cos \xi^2 && \bar{A}^2_3 = 0 \\
&\bar{A}^3_1 = 0 && \bar{A}^3_2 = 0 && \bar{A}^3_3 = 1
\end{aligned} \tag{4}$$

となる．一方，逆の座標変換

$$\xi^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad \xi^2 = \tan^{-1}(x^2/x^1), \quad \xi^3 = x^3 \tag{5}$$

の関係より，式 (A.8) のマトリックス $A_i^j = \partial\xi^j/\partial x^i$ は

$$\begin{aligned} &A_1^1 = \cos\xi^2 && A_2^1 = \sin\xi^2 && A_3^1 = 0 \\ &A_1^2 = -\frac{1}{\xi^1}\sin\xi^2 && A_2^2 = \frac{1}{\xi^1}\cos\xi^2 && A_3^2 = 0 \\ &A_1^3 = 0 && A_2^3 = 0 && A_3^3 = 1 \end{aligned} \tag{6}$$

となる．

式 (A.22) の計量テンソル $\hat{g}_{ij}$ は， $\hat{g}_{ij} = \bar{A}_i^k \bar{A}_j^l g_{kl}$ において $g_{kl} = \delta_{kl}$ であるから，$\hat{g}_{ij} = \bar{A}_i^k \bar{A}_j^k$ となり，各成分は

$$\hat{g}_{11} = 1,\ \hat{g}_{22} = (\xi^1)^2,\ \hat{g}_{33} = 1, \quad \text{ほかは } 0 \tag{7}$$

で表される．($\hat{g}_{ij} = \hat{\boldsymbol{g}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{g}}_j$ において $i \neq j$ について $\hat{g}_{ij} = 0$ であることは直交座標に他ならない)　一方，式 (A.29) の逆基底の計量テンソル $\hat{g}^{ij}$ は， $\hat{g}^{ij} = A_k^i A_l^j g^{kl}$ において $g^{kl} = \delta^{kl}$ であるから，$\hat{g}^{ij} = A_k^i A_k^j$ となり，各成分は

$$\hat{g}^{11} = 1,\ \hat{g}^{22} = \frac{1}{(\xi^1)^2}, \quad \hat{g}^{33} = 1,\ \text{ほかは } 0 \tag{8}$$

で表される．

共変微分にあらわれるクリストッフェルの記号，式 (A.39)

$$\left\{{}_j{}^i{}_k\right\} \ \left(= \left\{{}_k{}^i{}_j\right\}\right) = \frac{\hat{g}^{li}}{2}\Big(\frac{\partial\hat{g}_{jl}}{\partial\xi^k} + \frac{\partial\hat{g}_{kl}}{\partial\xi^j} - \frac{\partial\hat{g}_{kj}}{\partial\xi^l}\Big)$$

は，式 (8) より明らかなように $l = i$ のときのみ値を持つので，

$$\left\{{}_j{}^i{}_k\right\} \ \left(= \left\{{}_k{}^i{}_j\right\}\right) = \frac{\hat{g}^{ii}}{2}\Big(\frac{\partial\hat{g}_{ji}}{\partial\xi^k} + \frac{\partial\hat{g}_{ki}}{\partial\xi^j} - \frac{\partial\hat{g}_{kj}}{\partial\xi^i}\Big) \tag{9}$$

(i について総和をとらない) となる．明らかに $i = 3$ のときには 0 で，$i = 1, 2$ のときには

$$\left\{{}_j{}^1{}_k\right\} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\hat{g}_{kj}}{\partial\xi^1}, \qquad \left\{{}_j{}^2{}_k\right\} = \frac{1}{2(\xi^1)^2}\Big(\frac{\partial\hat{g}_{2j}}{\partial\xi^k} + \frac{\partial\hat{g}_{2k}}{\partial\xi^j}\Big) \tag{10}$$

となるから，クリストッフェル記号の各成分は

$$\left\{{}_2{}^1{}_2\right\} = -\xi^1,\ \left\{{}_1{}^2{}_2\right\} = \left\{{}_2{}^2{}_1\right\} = \frac{1}{\xi^1}, \qquad \text{ほかは } 0 \tag{11}$$

である．

式 (4.5) の座標変換のヤコビアン $J=\sqrt{\hat{g}/g}$ において，直角座標では $g=1$ であるのに対して，円柱座標の $\hat{g}$ は定義より

$$\hat{g}=|\hat{g}_{ij}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\xi^1)^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(\xi^1)^2 \tag{12}$$

であるから， $J=\xi^1$ となる (これは θ が長さ単位でないことに由来する).

2 基礎方程式の成分表示

2.1 質量保存式 (連続の式)

式 (A.59) の質量保存式は，式 (12) の関係を用いれば

$$\frac{1}{\xi^1}\frac{\partial(\xi^1 U^1)}{\partial\xi^1}+\frac{\partial U^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial U^3}{\partial\xi^3}=0 \tag{13}$$

で表される．

2.2 変形速度テンソルと運動量流束

共変微分 (式 (A.46) 参照) $U^i|_j=\partial U^i/\partial\xi^j+\{{}_k{}^i{}_j\}U^k$ の各成分は

$$\begin{aligned}
&U^1|_1=\frac{\partial U^1}{\partial\xi^1} && U^1|_2=\frac{\partial U^1}{\partial\xi^2}-\xi^1U^2 && U^1|_3=\frac{\partial U^1}{\partial\xi^3}\\
&U^2|_1=\frac{\partial U^2}{\partial\xi^1}+\frac{U^2}{\xi^1} && U^2|_2=\frac{\partial U^2}{\partial\xi^2}+\frac{U^1}{\xi^1} && U^2|_3=\frac{\partial U^2}{\partial\xi^3}\\
&U^3|_1=\frac{\partial U^3}{\partial\xi^1} && U^3|_2=\frac{\partial U^3}{\partial\xi^2} && U^3|_3=\frac{\partial U^3}{\partial\xi^3}
\end{aligned}$$

である．式 (A.69) の変形速度テンソル $D^{ij}=\frac{1}{2}\left(\hat{g}^{kj}U^i|_k+\hat{g}^{ki}U^j|_k\right)$ の各成分は

$$\begin{aligned}
&D^{11}=\frac{\partial U^1}{\partial\xi^1} && D^{12}=D^{21}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(\xi^1)^2}\frac{\partial U^1}{\partial\xi^2}+\frac{\partial U^2}{\partial\xi^1}\Big)\\
&D^{22}=\frac{1}{(\xi^1)^2}\Big(\frac{\partial U^2}{\partial\xi^2}+\frac{U^1}{\xi^1}\Big) && D^{23}=D^{32}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial U^2}{\partial\xi^3}+\frac{1}{(\xi^1)^2}\frac{\partial U^3}{\partial\xi^2}\Big)\\
&D^{33}=\frac{\partial U^3}{\partial\xi^3} && D^{31}=D^{13}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial U^3}{\partial\xi^1}+\frac{\partial U^1}{\partial\xi^3}\Big)
\end{aligned} \tag{14}$$

であるから，運動方程式 (A.74) を

$$\frac{\partial U^i}{\partial t} + H^{ij}|_j = 0 \tag{15}$$

と書くと，流束

$$H^{ij} = U^iU^j + \hat{g}^{ij}\frac{p}{\rho} - \nu(\hat{g}^{kj}U^i|_k + \hat{g}^{ki}U^j|_k) \tag{16}$$

の各成分は

$$\begin{aligned}
H^{11} &= (U^1)^2 + \frac{p}{\rho} - 2\nu\frac{\partial U^1}{\partial \xi^1} \\
H^{22} &= (U^2)^2 + \frac{1}{(\xi^1)^2}\Big\{\frac{p}{\rho} - 2\nu\Big(\frac{\partial U^2}{\partial \xi^2} + \frac{U^1}{\xi^1}\Big)\Big\} \\
H^{33} &= (U^3)^2 + \frac{p}{\rho} - 2\nu\frac{\partial U^3}{\partial \xi^3} \\
H^{12} &= H^{21} = U^1U^2 - \nu\Big\{\frac{1}{(\xi^1)^2}\frac{\partial U^1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial U^2}{\partial \xi^1}\Big\} \\
H^{23} &= H^{32} = U^2U^3 - \nu\Big\{\frac{\partial U^2}{\partial \xi^3} + \frac{1}{(\xi^1)^2}\frac{\partial U^3}{\partial \xi^2}\Big\} \\
H^{31} &= H^{13} = U^3U^1 - \nu\Big(\frac{\partial U^3}{\partial \xi^1} + \frac{\partial U^1}{\partial \xi^3}\Big)
\end{aligned} \tag{17}$$

で表される．

2.3 運動量保存式 (運動方程式)

式 (15) の $H^{ij}|_j$ において，テンソルの発散 (式 (A.55) 参照)

$$H^{ij}|_j = \frac{\partial H^{ij}}{\partial \xi^j} + \{{}_j{}^i{}_k\}H^{jk} + \{{}_j{}^j{}_k\}H^{ik} \tag{18}$$

を計算すると

$$\begin{aligned}
H^{1j}|_j &= \frac{\partial H^{11}}{\partial \xi^1} + \frac{\partial H^{12}}{\partial \xi^2} + \{{}_2{}^1{}_2\}H^{22} + \{{}_2{}^2{}_1\}H^{11} + \frac{\partial H^{13}}{\partial \xi^3} \\
H^{2j}|_j &= \frac{\partial H^{21}}{\partial \xi^1} + \{{}_1{}^2{}_2\}H^{12} + \frac{\partial H^{22}}{\partial \xi^2} + 2\{{}_2{}^2{}_1\}H^{21} + \frac{\partial H^{23}}{\partial \xi^3} \\
H^{3j}|_j &= \frac{\partial H^{31}}{\partial \xi^1} + \frac{\partial H^{32}}{\partial \xi^2} + \{{}_2{}^2{}_1\}H^{31} + \frac{\partial H^{33}}{\partial \xi^3}
\end{aligned}$$

である．したがって，発散型の運動方程式 (A.74) は

$$\frac{\partial U^1}{\partial t}+\frac{1}{\xi^1}\frac{\partial \xi^1 H^{11}}{\partial \xi^1}+\frac{\partial H^{12}}{\partial \xi^2}+\frac{\partial H^{13}}{\partial \xi^3}-\xi^1 H^{22}=0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial U^2}{\partial t}+\frac{1}{\xi^1}\frac{\partial \xi^1 H^{21}}{\partial \xi^1}+\frac{\partial H^{22}}{\partial \xi^2}+\frac{\partial H^{23}}{\partial \xi^3}+2\frac{H^{21}}{\xi^1}=0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial U^3}{\partial t}+\frac{1}{\xi^1}\frac{\partial \xi^1 H^{31}}{\partial \xi^1}+\frac{\partial H^{32}}{\partial \xi^2}+\frac{\partial H^{33}}{\partial \xi^3}=0 \tag{21}$$

と表される．

3 基礎方程式の物理成分表示

物理成分は式 (A.27) より

$$U^{(i)}=\sqrt{\hat{g}_{ii}}U^i, \qquad H^{(ij)}=\sqrt{\hat{g}_{ii}}\sqrt{\hat{g}_{jj}}H^{ij}$$

(i, j について総和をとらない) で表される．円柱座標では，速度の反変成分と物理成分 (u_r, u_θ, u_z) には

$$U^1(=U^{(1)})=u_r, \quad U^2(=\frac{U^{(2)}}{\xi^1})=\frac{u_\theta}{r}, \quad U^3(=U^{(3)})=u_z \tag{22}$$

の対応があり，流束については

$$\begin{array}{lll} H^{11}(=H^{(11)})=h_{rr} & H^{12}(=\dfrac{H^{(12)}}{\xi^1})=\dfrac{h_{r\theta}}{r} & H^{13}(=H^{(13)})=h_{rz} \\ H^{21}(=\dfrac{H^{(21)}}{\xi^1})=\dfrac{h_{\theta r}}{r} & H^{22}(=\dfrac{H^{(22)}}{(\xi^1)^2})=\dfrac{h_{\theta\theta}}{r^2} & H^{23}(=\dfrac{H^{(23)}}{\xi^1})=\dfrac{h_{\theta z}}{r} \\ H^{31}(=H^{(31)})=h_{zr} & H^{32}(=\dfrac{H^{(32)}}{\xi^1})=\dfrac{h_{z\theta}}{r} & H^{33}(=H^{(33)})=h_{zz} \end{array} \tag{23}$$

の関係がある．

3.1 質量保存式 (連続の式)

質量保存式の物理成分表示は，式 (13) に式 (22) を代入することによって

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (ru_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{24}$$

と導かれる．

3.2 変形速度テンソルと運動量流束

式 (A.80) で表される変形速度テンソルの物理成分

$$D^{(ij)} = \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}_{ii}}\sqrt{\hat{g}_{jj}}}\left(\hat{g}^{kj}U^i|_k + \hat{g}^{ki}U^j|_k\right)$$

(i, j について総和をとらない) の各成分は

$$\begin{aligned}
d_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad d_{r\theta} = d_{\theta r} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\Big) \\
d_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad d_{\theta z} = d_{z\theta} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\Big) \\
d_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad d_{zr} = d_{rz} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\Big)
\end{aligned} \tag{25}$$

また運動量流束の物理成分 $H^{(ij)}$ は

$$\begin{aligned}
h_{rr} &= u_r^2 + \frac{p}{\rho} - 2\nu\frac{\partial u_r}{\partial r} \\
h_{r\theta} &= h_{\theta r} = u_r u_\theta - \nu\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\Big) \\
h_{\theta\theta} &= u_\theta^2 + \frac{p}{\rho} - 2\nu\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\Big) \\
h_{\theta z} &= h_{z\theta} = u_\theta u_z - \nu\Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\Big) \\
h_{zz} &= u_z^2 + \frac{p}{\rho} - 2\nu\frac{\partial u_z}{\partial z} \\
h_{zr} &= h_{rz} = u_z u_r - \nu\Big(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\Big)
\end{aligned} \tag{26}$$

で表される.

3.3 運動量保存式 (運動方程式)

円柱座標系における発散型運動方程式 (A.74) の物理成分表示は，式 (19)∼(21) に式 (22),(23) を代入することによって得られる.

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r h_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial h_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial h_{rz}}{\partial z} - \frac{h_{\theta\theta}}{r} = 0 \tag{27}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r h_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial h_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial h_{\theta z}}{\partial z} + \frac{h_{\theta r}}{r} = 0 \tag{28}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r h_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial h_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial h_{zz}}{\partial z} = 0 \tag{29}$$

さらに勾配型運動方程式 (A.77) は次のように導かれる.

$$\frac{Du_r}{Dt} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{p}{\rho} - \frac{u_\theta^2}{r} - \nu\Big(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\Big) = 0 \tag{30}$$

$$\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{p}{\rho} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \nu\Big(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\Big) = 0 \tag{31}$$

$$\frac{Du_z}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{p}{\rho} - \nu\nabla^2 u_z = 0 \tag{32}$$

ただし

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{33}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{34}$$

である.

これで円柱座標における非圧縮流れの運動方程式の慣用表現が導かれた.