

を採用すれば二乗量は保存される。これは Piacsek と Williams⁷⁶⁾ の提案によるもので、二乗量保存型 (quadratic conserving form) とよばれている。厳密には二乗量はエネルギーでない。二乗量 $\widetilde{u}^2/2$ と $\widetilde{v}^2/2$ の収支はそれぞれ別の $u_{i+\frac{1}{2},j}$ 点と $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ 点で考えるので、二乗量保存は必ずしも局所的なエネルギーの保存を論じているわけではない。それでも、疑似エネルギーである二乗量の保存は、計算の安定に寄与すると考えられるので、重要な性質ではある。

ときどき「エネルギー保存型 $\frac{1}{2}(u_j \partial u_i / \partial x_j + \partial u_i u_j / \partial x_j)$ を使用した」という記述を見かけるが、厳密には「二乗量保存型」と表現すべきである。この保存性は、式 (3.70),(3.71) のように二つの項の差分方法に整合性がある場合にのみ満たされる。いずれかの項が不適切な差分であったり、一方に後述の上流化 (風上化) を使ったりしたら、全く意味をなさない。最も多い誤用は、式 (3.59),(3.60) のタイプを使って、 $u_{i+\frac{1}{2},j}$ の点と $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ の点でそれぞれ

$$\frac{1}{2} \left\{ \left[\delta_x (\bar{u}^x \bar{u}^x) + \delta_y (\bar{v}^x \bar{u}^y) \right]_{i+\frac{1}{2},j} + \left[u \delta'_x u + \bar{v}^{xy} \delta'_y u \right]_{i+\frac{1}{2},j} \right\} \quad (3.72)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \left[\delta_x (\bar{u}^y \bar{v}^x) + \delta_y (\bar{v}^y \bar{v}^y) \right]_{i,j+\frac{1}{2}} + \left[\bar{u}^{xy} \delta'_x v + v \delta'_y v \right]_{i+\frac{1}{2},j} \right\} \quad (3.73)$$

としたり、第2項に上流差分を使う例である。

整理すると、発散型 (3.53),(3.54) は運動量を保存するが二乗量は漏れる。混合型 (3.70),(3.71) は二乗量を保存するが運動量には漏れを生ずる。勾配型 (3.63),(3.64) はそのいずれについても漏れがある。しかし、それらの漏れはいずれも、質量保存誤差 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ に比例するもので、これが十分に小さければ問題にはならない。以上の全ての型は、適切な差分化が行われ、連続の式が十分な精度で満たされれば、運動量と二乗量を保存するともいえる。実際に計算をしてみると、式 (3.53),(3.54) と式 (3.63),(3.64) の結果はほとんど見分けがつかないほどである。しかし、式 (3.59),(3.60) の結果は明らかにこれらと有意な差がある⁹⁶⁾。

結局、Harlow と Welch による MAC 法も、Piacsek と Williams による二乗量保存型も、不可避な誤差を許容しながら、安定な計算を継続する方法である。これらは、ポアソン式の緩和計算に多くの反復回数を費やすことができなかった時代に提案されたものであり、不十分な計算機環境が生んだアイデアといえよう。

互換

$$\left. \begin{aligned} [\overline{JV}^\eta]_{i,j} &= \frac{\Delta x_i v_{i,j-\frac{1}{2}} + \Delta x_i v_{i,j+\frac{1}{2}}}{2} \\ [\overline{JU}^\eta]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta y_j u_{i+\frac{1}{2},j} + \Delta y_{j+1} u_{i+\frac{1}{2},j+1}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.90)$$

$$[\overline{u}^\xi]_{i,j} = \frac{u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j}}{2}, \quad [\overline{u}^\eta]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1}}{2} \quad (3.91)$$

$$[\overline{v}^\eta]_{i,j} = \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}, \quad [\overline{v}^\xi]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}}{2} \quad (3.92)$$

1階差分は両側の差

$$[\delta_\xi u]_{i,j} = -u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j}, \quad [\delta_\eta u]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = -u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1} \quad (3.93)$$

$$[\delta_\eta v]_{i,j} = -v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}}, \quad [\delta_\xi v]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = -v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}} \quad (3.94)$$

でよい。式(3.85),(3.86) および 式(3.87),(3.88) をそれぞれ式(3.74),(3.75) および 式(3.79),(3.80) と比較すると、前者は比例配分の重みを後者とは逆にしてしまったようである。しかし、式(3.85),(3.86) と式(3.87),(3.88) は、前節で議論したとおりの互換性をもつ。式(3.85) と式(3.87) の差をとると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \delta_{\xi_k} (\overline{JU}^k \xi^i \overline{u}_i^{\xi^k}) - \frac{1}{J} \overline{JU}^k \xi^i \delta_{\xi^k} u_i^{\xi^k} \\ &= \frac{u_{i+\frac{1}{2}}}{2 \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta y_j} \times \left\{ \begin{aligned} & \Delta y_j (-u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j}) \\ & + \Delta x_i (-v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}}) \\ & + \Delta y_j (-u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{3}{2},j}) \\ & + \Delta x_{i+1} (-v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \right\} \\ &= \left[\frac{u}{J} \overline{\delta_\xi(JU)} + \delta_\eta(JV) \right]_{i+\frac{1}{2},j}^{\xi} \end{aligned} \quad (3.95)$$

となる。この結果から、 $u_{i+\frac{1}{2},j}$ をはさむ二つのセルで連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \left(= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial(JU)}{\partial \xi} + \frac{\partial(JV)}{\partial \eta} \right] \right) = 0 \quad (3.96)$$

に対する離散形

$$\frac{1}{J} [\delta_\xi(JU) + \delta_\eta(JV)] = 0 \quad (3.97)$$

界から遠方境界までを扱うものとする。遠方境界とは、物体の影響が十分に小さくなると仮定できる位置に設定される計算領域の外縁である。固体壁ではふつうは速度が指定される。流入・流出・遠方の境界では速度が指定される場合と圧力が指定される場合がある。

3.8.2 固体壁の境界条件

固体壁での境界条件を与えるため、図 3.16 のように壁の内側に仮想セルをおく。その壁に垂直な方向の格子幅は、壁に接する流れ場のセルと同じ ($\Delta y_0 = \Delta y_1$) とする。固体壁での速度境界条件としては、接線方向にはすべりなし条件 (no-slip boundary condition) $u = 0$ あるいはすべり境界条件 $\partial u / \partial y = 0$ を与えることが多い。それぞれ図 3.16 では $u_{i+\frac{1}{2},0} = \mp u_{i+\frac{1}{2},1}$ とおけばよいわけであるが、実際のプログラムではこの速度点のための配列は必要でない。前節で説明した変数配置を思い出そう。計算上は $(i + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の位置で $\bar{u}^y, \bar{v}^x, \delta_y u$ が必要となる。仮想セルでの速度を考慮し、すべりなし境界条件ならば次のようにする。

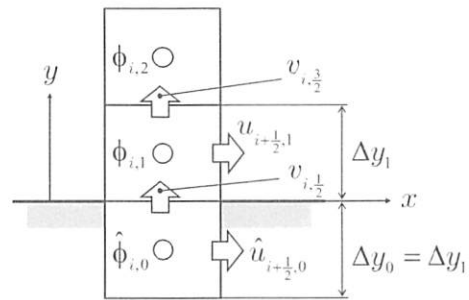


図 3.16 固体壁境界でのステンシル

$$[\bar{u}^y]_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = 0, \quad [\delta_y u]_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},1}}{\Delta y_1/2} \tag{3.138}$$

できれば $[\delta_y u]_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ の精度をもう少し上げたい。すべり境界条件ならば次のようにすればよい。

$$[\bar{u}^y]_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2},1}, \quad [\delta_y u]_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = 0 \tag{3.139}$$

さらに一般的には、壁面上での接線速度 $u_{i+\frac{1}{2},wall}$ が与えられたら

$$[\bar{u}^y]_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2},wall}, \quad [\delta_y u]_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},1} - u_{i+\frac{1}{2},wall}}{\Delta y_1/2} \tag{3.140}$$

とする。同じ点での法線方向成分には、壁を透過する速度から

$$[\bar{v}^x]_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{v_{i,\frac{1}{2}} + v_{i+1,\frac{1}{2}}}{2}, \quad [\delta_x v]_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{-v_{i,\frac{1}{2}} + v_{i+1,\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \tag{3.141}$$

KIV

を与えればよい。

圧力の境界条件は複数存在する。壁面での運動方程式から、 $\partial p/\partial n$, $\partial p/\partial s_1$, $\partial p/\partial s_2$ (t は垂直方向, s_1, s_2 は独立な二つの接線方向) が与えられる。実際の現象ではその全てが満足されているが、離散化すると必ずしもそうではないといわれる。

これまでに述べた時間進行法との関連で圧力境界条件を決めるならば、境界での法線方向の運動方程式に対応する法線方向の圧力勾配を用いるのがよい。固体壁では、通常は壁を透過する流れがないが、強制的に吹き出し・吸い込みがある場合や圧力に応じて壁を通過する流れが発生する場合もあるだろう。いずれにしても、何らかの形で壁面での法線速度 v_{wall} が指定されるものとする。最も簡単な扱いは、SMAC法の予測段階で、境界での法線速度 v^P に対して、ナビエ-ストークス式からの予測 (3.13) ではなく、

$$v_{i,\frac{1}{2}}^P = v_{i,wall}^{n+1} \quad (3.142)$$

と、壁面境界条件から決まる法線速度を与えてしまうことである。通過速度は時間的に変化することも考慮し、新ステップでの値であることを示すために $(n+1)$ を付けた。下付き添え字については図 3.16 を参照していただきたい。続く修正段階 (3.14) においてその境界値を変更してはならないから、 ϕ の境界条件は $[\partial\phi/\partial y]_{wall} = 0$ でなければならない。境界点を基点として $\partial\phi/\partial y$ を与えるために、壁面内部に仮想的な $\hat{\phi}$ の定義点をおくと、式 (3.14) は

$$v_{i,\frac{1}{2}}^{n+1} = v_{i,\frac{1}{2}}^P - \Delta t \frac{-\hat{\phi}_{i,0} + \phi_{i,1}}{\tilde{\Delta}y_{\frac{1}{2}}} \quad (3.143)$$

と簡単になる。ここで $\tilde{\Delta}y_{\frac{1}{2}}$ は

$$\tilde{\Delta}y_{\frac{1}{2}} = \frac{\Delta y_0 + \Delta y_1}{2} = \Delta y_1$$

でよい。既に式 (3.142) で $v_{i,\frac{1}{2}}^P$ に与えた境界速度を変更しないためには、次式が成立しなければならない。

$$\hat{\phi}_{i,0} = \phi_{i,1} \quad (3.144)$$

かし、物体から十分に遠くない場合にはこの条件は乱暴すぎる。実際のところ、図 3.13(a) の境界層流れでは境界層厚さの発達により排除される流体の流れがあり得る。図 3.13(b) の噴流ではエントレインメントにより計算領域に引き込まれる流れがある。これらの遠方境界を通過する流れは一般に未知であり、計算の過程で求められるべきものである。

遠方境界での流れを許容する境界条件としてはトラクションフリー境界条件がある^{49, 50)}。図 3.19 を参照しながらその導入法を示しておこう。トラクションフリー境界条件は、境界において流体応力の法線方向成分がないと仮定するものである。具体的には \mathbf{n} を境界における外側法線ベクトルとすると

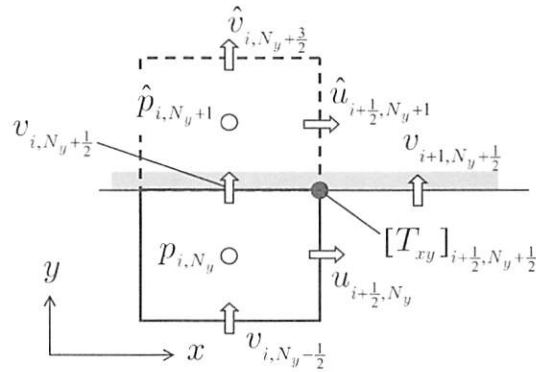


図 3.19 遠方境界に接する差分格子

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{成分表示では } T_{ij}n_j = 0 \quad (3.164)$$

で表される。式 (3.164) は、図 3.19 のように $y = y_{N_y + 1/2}$ 面を外部境界とする二次元場では $\mathbf{n} = (0, 1)$ であるから、 $T_{i2} = 0$ より

$$T_{xy} = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.165)$$

$$T_{yy} = -P + 2\nu \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.166)$$

となる。二次元の場合、変数は u, v, P の三つであるが、境界条件は二つしかない。三次元では 4 変数に対して 3 条件しかない。したがって、いずれか一つを別途決める必要がある。これには、十分に遠方での圧力として一定値（例えば 0）を与えることが多い。

式 (3.165) は、図 3.19 の $[T_{xy}]_{i+1/2, N_y+1/2}$ 点で与えるのが妥当であろう。その離散形は

$$\frac{-u_{i+1/2, N_y} + \hat{u}_{i+1/2, N_y+1}}{\Delta y_{N_y+1/2}} + \frac{-v_{i, N_y+1/2} + v_{i+1, N_y+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} = 0 \quad (3.167)$$

である. 式 (3.167) は領域外の $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}, N_y+1}$ の外挿式を与える. 式 (3.166) については, 境界外の \hat{P}_{i, N_y+1} か境界の $v_{i, N_y+\frac{1}{2}}$ か, いずれの位置で与えるかについて任意性がある. 前者を採用すれば

$$-\hat{P}_{i, N_y+1} + 2\nu \frac{-v_{i, N_y+\frac{1}{2}} + \hat{v}_{i, N_y+\frac{3}{2}}}{\hat{\Delta}y_{N_y+1}} = 0 \quad (3.168)$$

と離散化される. これは, 境界より外側での圧力 \hat{P}_{i, N_y+1} と $\hat{v}_{i, N_y+\frac{3}{2}}$ の一方が指定されれば他方を外挿する式となる. 仮想格子の幅 $\hat{\Delta}y_{N_y+1}$ は任意である. そこで, 境界に接する格子と同じ $\hat{\Delta}y_{N_y+1} = \Delta y_{N_y}$ とし, 式 (3.167) でも $\tilde{\Delta}y_{N_y+1} = \Delta y_{N_y}$ を使えばよい. 式 (3.167) によって \hat{u} が外挿されれば, 領域外のセル (i, N_y) での連続の式

$$\frac{-\hat{u}_{i-\frac{1}{2}, N_y+1} + \hat{u}_{i+\frac{1}{2}, N_y+1}}{\Delta x_i} + \frac{-v_{i, N_y+\frac{1}{2}} + \hat{v}_{i, N_y+\frac{3}{2}}}{\hat{\Delta}y_{N_y+1}} = 0 \quad (3.169)$$

から $\hat{v}_{i, N_y+\frac{3}{2}}$ を決めることもできる. しかし, 仮想のセルでの連続の式は必須ではないので, \hat{P}_{i, N_y+1} から先に決めても差し支えない.

具体的に運動方程式の離散化に要する成分を考えながら, 境界条件の適用法を検討しよう. 発散型では

$$\begin{aligned} & [\delta_x(-P - \bar{u}^x \bar{u}^x + 2\nu \delta_x u) + \delta_y(-\bar{u}^y \bar{v}^x + \nu\{\delta_y u + \delta_x v\})]_{i+\frac{1}{2}, j} \\ & [\delta_x(-\bar{u}^y \bar{v}^x + \nu\{\delta_y u + \delta_x v\}) + \delta_y(-P - \bar{v}^y \bar{v}^y + 2\nu \delta_y v)]_{i, j+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

を求めることになるので, 点 $[T_{xy}]_{i+\frac{1}{2}, N_y+\frac{1}{2}}$ において $-\bar{u}^y \bar{v}^x + \nu\{\delta_y u + \delta_x v\}$, 領域外の点 P_{i, N_y+1} において $-P - \bar{v}^y \bar{v}^y + 2\nu \delta_y v$ を必要とする. 勾配型では

$$\begin{aligned} & [-\delta_x P - \bar{u}^x \delta_x \bar{u}^x - \bar{v}^x \delta_y \bar{u}^y + \nu\{\delta_x(\delta_x u) + \delta_y(\delta_y u)\}]_{i+\frac{1}{2}, j} \\ & [-\delta_y P - \bar{u}^y \delta_x \bar{v}^x - \bar{v}^y \delta_y \bar{v}^y + \nu\{\delta_x(\delta_x v) + \delta_y(\delta_y v)\}]_{i, j+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

をを求めることになるので, 点 $[T_{xy}]_{i+\frac{1}{2}, N_y+\frac{1}{2}}$ において $\bar{u}^y, \bar{v}^x, \delta_y u, \delta_x v$, 領域外の点 P_{i, N_y+1} において $P, \bar{v}^y, \delta_y v$ を必要とする. 発散型はトラクションフリー境界条件そのままの形で取り入れられる. いずれにしても, 式 (3.167) および式 (3.168) で $\hat{u}, \hat{v}, \hat{P}$ が与えられれば, 運動方程式の差分計算に必要な数値が揃う.

6次精度とするには

$$[\bar{u}^x]_i = \frac{3u_{i-\frac{5}{2}} - 25u_{i-\frac{3}{2}} + 150u_{i-\frac{1}{2}} + 150u_{i+\frac{1}{2}} - 25u_{i+\frac{3}{2}} + 3u_{i+\frac{5}{2}}}{256} \quad (3.174)$$

$$[\delta_x u]_i = \frac{-9u_{i-\frac{5}{2}} + 125u_{i-\frac{3}{2}} - 2250u_{i-\frac{1}{2}} + 2250u_{i+\frac{1}{2}} - 125u_{i+\frac{3}{2}} + 9u_{i+\frac{5}{2}}}{1920\Delta x} \quad (3.175)$$

と変更すればよい。スタガード格子では、必ず以上のような $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \dots$ のステンシルを使う偶数点差分となる。対流項に対する $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ のステンシルを使う ($0 \times u_i$ を含めば奇数点の) 4次精度

$$[\delta'_x u]_i = \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x} \quad (3.176)$$

や6次精度

$$[\delta'_x u]_i = \frac{u_{i-3} + 9u_{i-2} - 45u_{i-1} + 45u_{i+1} - 9u_{i+2} + u_{i+3}}{60\Delta x} \quad (3.177)$$

のような1階差分はなじまない。

以上の単純な拡張では、いくらでも精度次数を高めることができるが、次のような二つの問題がある。第一には、対流項の差分の互換性が崩れる。境界をうまく処理すれば計算領域全体を通しての大域的な保存性は維持されるが、局所的な保存性は成立しない。第二には、中心差分では境界近傍では計算領域外にも2点以上のステンシルが必要となる場合があることである。

3.9.2 高次差分における対流項の整合性

高次化に伴う対流項の整合性（互換性と保存性）に関して検討する。等間隔格子での2次精度中心差分において適切な対流項の離散化は、式(3.127)に示したとおり、発散型では

$$C_i = -\delta_{x_j} (\bar{u}_j^{x_i} \bar{u}_i^{x_j}) \quad (3.178)$$

勾配型では

$$C_i = -\bar{u}_j^{x_i} \delta_{x_j} u_i^{x_j} \quad (3.179)$$

(e) 共変物理成分 $U_{(k)}$

が考えられる.

反変成分と共変成分では前者が使われることが多い. 質量保存式(4.19)は, 図4.2 からわかるように, 一般座標に沿って JU^j が計算格子 $\Delta\xi \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\zeta$ での各面からの流束を表している. このことから, 反変成分を用いることが理にかなっている. ただし, 反変・共変ともに物理成分による基礎方程式は煩雑になる. 円柱座標や球極座標のように特定の直交曲線座標を除き, 一般座標では物理成分表示が用いられることは少ない. 結局, 基本変数の一般的な選択としては, デカルト座標の物理成分 u_i または一般座標の反変成分 U^j の2通りとってよいだろう.

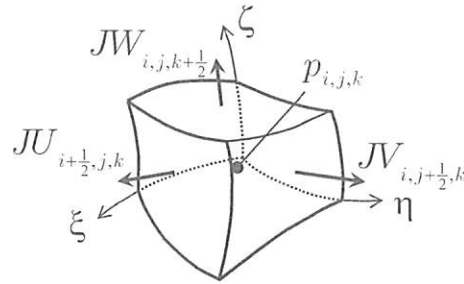


図 4.2 第 (i, j, k) 番目の格子での流量の収支

反変成分による表示とデカルト座標成分による表示

まず, 速度の反変成分のみによる運動方程式を考える. 運動量保存式は, 発散型では付録 A.2.3 の式 (A.74),(A.75) に示すように

$$\frac{\partial U^i}{\partial t} + (U^i U^j)|_j + \frac{1}{\rho} \{ \hat{g}^{ij} p - \mu(\hat{g}^{kj} U^i|_k + \hat{g}^{ki} U^j|_k) \}|_j = 0 \quad (4.33)$$

勾配型では式 (A.76) に示すように

$$\frac{\partial U^i}{\partial t} + U^j U^i|_j + \frac{\hat{g}^{ij}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi^j} - \frac{1}{\rho} \{ \mu(\hat{g}^{kj} U^i|_k + \hat{g}^{ki} U^j|_k) \}|_j = 0 \quad (4.34)$$

となる.

問題は, 式 (4.33),(4.34) に含まれる共変微分

$$U^i|_j = \frac{\partial U^i}{\partial \xi^j} + \{j^i_k\} U^k \quad (4.35)$$

$$H^{ij}|_j = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (J H^{ij}) + \{j^i_k\} H^{jk} \quad (4.36)$$

である. それぞれ第1項は計算格子 $\Delta\xi \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\zeta$ の各面を通しての収支の形 (保存型) になっているのだが, クリストッフエル記号 $\{j^i_k\}$ の項があることで計算が煩わしそうに見える. この項はあたかもソース項のようにみえることから,

34

基本変数と格子系の組み合わせ

妥当な選択としては、スタガード配置で反変成分を基本変数とする方法と、コロケート配置でデカルト座標成分を基本変数とする方法のいずれかであろう。反変成分だけで数値計算しようとする、基礎方程式からわかるように、保存型差分式を構成するのが困難、計算が煩雑、クリストッフェル記号のためのメモリー増大の問題がある。コロケート格子を用いれば、逐一デカルト座標成分から反変成分への変換が必要となり手続きは増すものの、保存則を離散的にも実現するためには有利である。

以上の理由により、これ以降、一般座標においてはコロケート格子を用いる。

4.5 コロケート格子による解法

コロケート格子における数値計算の手順を前述のSMAC法に準じて示す。

例えば ξ 方向について、2次精度の中心差分と補間式を

$$[\delta_\xi f]_{i,j,k} = -f_{i-\frac{1}{2},j,k} + f_{i+\frac{1}{2},j,k} \tag{4.37}$$

$$[\bar{f}^\xi]_{i,j,k} = \frac{f_{i-\frac{1}{2},j,k} + f_{i+\frac{1}{2},j,k}}{2} \tag{4.38}$$

$$[\delta'_\xi f]_{i,j,k} = \frac{-f_{i-1,j,k} + f_{i+1,j,k}}{2} \tag{4.39}$$

と表記する。通常行われるように、計算空間での格子幅を $\Delta\xi = 1$ とした。他方向についても同様に $\Delta\eta = 1, \Delta\zeta = 1$ とする。

今後 ξ 座標での差分 $\delta_{\xi^k} f, \delta'_{\xi^k} f$ と補間 \bar{f}^{ξ^k} に関しては、簡単のためそれぞれ $\delta_k f, \delta'_k f$ および \bar{f}^k と表記する。 **なお、 \bar{f}^k の k は総和規約の対象外とする。** ※

原則的には、スタガード配置された反変成分が連続の式

$$\frac{1}{J} \delta_j (JU^j)^{n+1} = 0 \tag{4.40}$$

に拘束されるものとする。したがって、反変成分を予測し、これに圧力修正量 ϕ の寄与を加えた結果、次のステップで連続の式を満足するような ϕ を求めればよい。

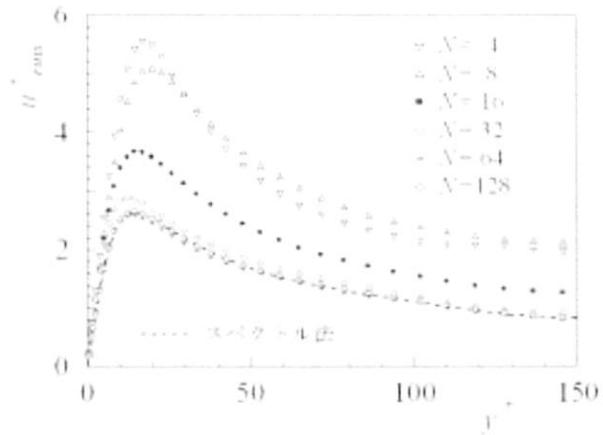
※ 関連する式は、(4.41)~(4.45), (4.47), (4.48), (4.50), (4.51) (4.74)~(4.76), (4.83)~(4.86), (4.88), (4.92)~(4.95) である。補間の方向を表わす上付添字 (\bar{f}^k の k) は、「同じ記号が 2 回使われたら総和を求める」にはカウントされず、上付添字を含めて 3 回使われる記号についても 総和をとるものとする。

はおおむね単調である。粗い格子では、主流方向の変動が大きく、壁に垂直な方向の変動は小さい。図示を省略したが、横断方向の変動は垂直方向の変動と同様の傾向であった。

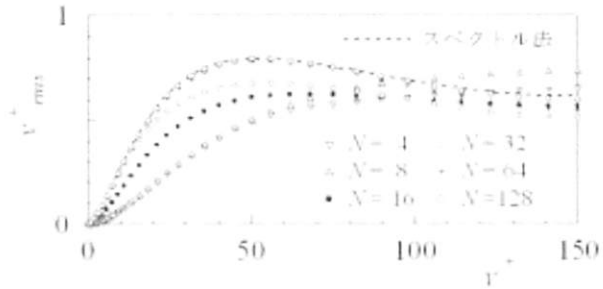
格子解像度が不足するときの症状は、エネルギーが大きく、非等方性も大きいことである。エネルギーが大きい原因は、本来ならば小スケール渦によって担われるエネルギー散逸が散逸的ではない大スケール渦に負わされるからである。非等方的になる原因は、主流方向から他の2方向への配分にかかわる渦運動を表現できないからである。

レイノルズ数 $R_\tau = 150$ の平行平板間乱流における平均速度と速度変動強度を求めるには、格子数 64^3 で十分と考えられる。しかし、より高次のモーメントには不十分である。図5.7は、速度変動の3次モーメントの例として、壁に垂直な速度成分の変動のひずみ度 (skewness) $v_{skew} = \overline{v^3} / \overline{v^2}^{3/2}$ を示したもの

$$v_{skew} = \overline{v^3} / \overline{v^2}^{3/2}$$



(a) 主流方向の速度変動



(b) 壁に垂直な方向の速度変動

図 5.6 平行平板間乱流の速度変動強度分布 (格子分割数の影響)

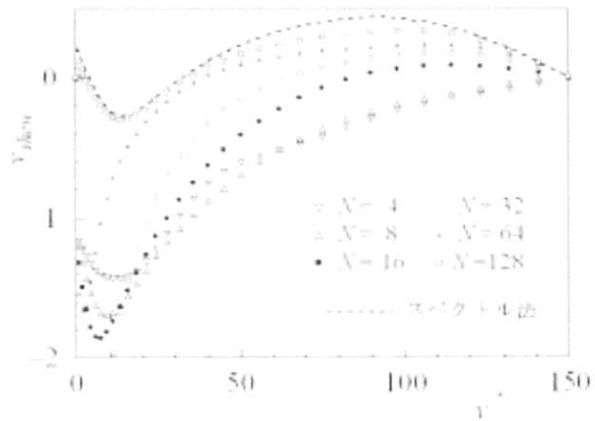


図 5.7 平行平板間乱流における垂直方向速度変動のひずみ度 (格子分割数の影響)